Résumé 05 : Séries Numériques (2ème partie)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1 Séries réelles ou complexes

Notez bien que dans les résultats qui vont suivre, la série de référence (a_n) est toujours positive.

§ 1. ***Absolue convergence.–*** Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge. Cette dernière étant à terme positifs, on dispose de tout un arsenal pour identifier sa nature. Par ailleurs :

$$\boxed{\textbf{SI } \sum |u_n| \text{ converge, } \textbf{ALORS } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Comme vous vous en doutez à ma typographie, la réciproque est fausse. La série $\sum \dfrac{(1)^n}{n}$ fournit un contre-exemple. On dira d'une série qu'elle est **semi-convergente** lorsqu'elle converge mais qu'elle ne converge pas absolument.

§ 2. ***Conditions suffisantes de convergence.–*** Grâce à ce résultat, certaines règles dévolues aux séries à termes positifs se généralisent. Récrivons-les dans ce cas :

- **Règle de $n^\alpha u_n$** : Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
  S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Soit (u_n) une suite complexe et (a_n) une suite positive telle que $\sum a_n$ converge.
  - Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
  - Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
  - Si $u_n \sim a_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

  L'hypothèse sur laquelle on ne transige pas est la positivité de la suite de référence (a_n).
- Si votre série n'est pas absolument convergente, vous pouvez toujours essayer de faire un développement asymptotique du terme général pour déterminer la nature de la série. Dans ce cas, il sera nécessaire de pousser ce développement asymptotique jusqu'à $o(a_n)$, ou bien un $O(a_n)$, où $\sum a_n$ converge absolument.

§ 3. ***Les séries alternées.–*** Une série est dite **alternée** si elle est de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$, où (u_n) est une suite positive.Il existe une condition suffisante simple de convergence d'un telle suite, appelée critère des séries alternées, ou règle de Leibnitz :

Si (u_n) est une suite décroissante vers 0, alors :

- $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente.
- Pour tout entier n, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ de cette série est du signe de son premier terme $(1)^{n+1}u_{n+1}$.
- Pour tout entier n, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

La divergence de la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ doit vous convaincre que l'hypothèse de décroissante de (u_n) est indispensable.

ANNEXE

A Quelques exercices imposés

Exercices :

CCP Numéro 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
2. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.